PROBABILITES

- La **fréquence *f*** en **statistique** rend compte du nombre de fois où un événement s'est produit : elle est comprise entre 0 et 1 et est une évaluation à posteriori, calculée par l'expérimentation.
- La **probabilité *p*** en revanche d'un événement indique s'il a plus ou moins de "chances" de se produire : elle varie de 0 (→ **événement impossible**) à 1 (→ **événement certain**) et est une évaluation à priori.

Vocabulaire

Expérience aléatoire & Issues

Définition

On lance un dé ou une pièce de monnaie, on tire une carte dans un jeu…
Les résultats possibles sont liés au hasard ; On parle alors d'**expérience** ou **épreuve aléatoire**.

Définition

Les différents résultats d'une expérience aléatoire s'appellent les **éventualités** ou **issues**.
L'ensemble des éventualités s'appelle l'**univers**, on le note souvent Ω.

Exemple :

→ Expérience aléatoire : lancer d'un dé.
→ Issues : il y en a 6 : 1, 2, 3, 4, 5 et 6.
→ Univers : Ω = {1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 }.

Evénements

Définition

Un **événement** est une partie (ou un sous-ensemble) de l'univers.
On dit que cet événement est réalisé si l'issue de l'expérience est l'une des éventualités qui le compose.

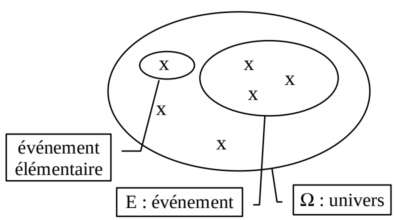
Exemple :

→ E_1 = "l e n° est pair" = {2 ; 4 ; 6}.
→ E_2 = "l e n° est au moins égal à 5" = {5 ; 6}.

Evénements particuliers

Définition

- Ω s'appelle l'événement **certain**.
- Ø s'appelle l'événement **impossible**.
- {a} s'appelle un événement **élémentaire** (il est formé d'une seule éventualité).



Exemple : On lance un dé.

→ L'événement certain est {1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6}.
→ Les 6 événements élémentaires sont {1}, {2}, {3}, {4}, {5} et {6}.
→ L'événement « Obtenir un nombre impair » est {1 ; 3 ; 5}; Il est composé de trois éventualités.
→ L'événement « Obtenir un nombre inférieur à 7 » est l'événement certain.
→ L'événement « Obtenir 8 » est l'événement impossible.

Résultat

- La fréquence d'une issue est comprise entre 0 et 1 : $0 \leq f_i \leq 1$ pour $1 \leq i \leq n$.
- La somme des fréquences de toutes les issues est égale à 1 : $f_i + f_2 + \ldots + f_n = 1$.

Probabilité d'une issue

Définition

Plus le nombre de fois où on répète une même expérience est grand, plus la fréquence f_i d'une issue x_i se rapproche inexorablement d'un nombre qu'on appelle sa **probabilité** p_i.

Exemple : si on lance un très grand nombre de fois une pièce de monnaie, f_{pile} se rapprochera de 0,5 d'où on pose $p_{pile} = 0,5$.

Résultat

- La probabilité d'une issue est comprise entre 0 et 1 : $0 \leq p_i \leq 1$ pour $1 \leq i \leq n$.
- La somme des probabilités de toutes les issues est égale à 1 : $p_i + p_2 + \ldots + p_n = 1$.

Loi de probabilité

Définition

Soit $E = \{x_1, x_2, \ldots.., x_n\}$ un univers.
Définir une **loi de probabilité** sur E, c'est associer à chaque issue x_i sa probabilité p_i

Remarque : On représente souvent la loi de probabilité sous la forme d'un tel tableau :

issues	x_1	x_2	…	x_n
probabilités	p_1	p_2	…	p_n

Exercice 3 :

Un dé pipé est tel que : p(1) = 0.1, p(2) = 0.2, p(3) = 0.3, p(4) = 0 et p(5) = p(6). Déterminer la loi de probabilité qui lui est associé.

Exercice 4 :

Une loi de probabilité sur un univers $E = \{x_1, x_2, \ldots.., x_6\}$ est telle que : $p_1 = p_2 = p_3$ et $p_4 = p_5 = p_6 = 2p_1$. Déterminer cette loi de probabilité.

Probabilité d'un événement

Définition

La **probabilité d'un événement** E, notée p(E) est la somme des probabilités des issues qui réalisent E.

Exemple : Si $E = \{x_1 ; x_3 ; x_4\}$ alors $p(E) = p(x_1) + p(x_3) + p(x_4) = p_1 + p_3 + p_4$.

Exercice 5 :

Dans une classe, 20% des élèves ont 16 ans, 35% ont 17 ans, 30% ont 18 ans et 15% ont 19 ans.
Quelle est la probabilité de chacun des événements suivants :

- A : « l'élève a au moins 17 ans »,
- B : « l'élève a strictement plus de 17 ans ».

Exercice 6 :

Un dé cubique est pipé de sorte que : p(1) = 0,10; p(2) = 0,11; p(3) = 0,12; p(4) + p(5) = 0,5 et p(l) + p(5) = 2×p(4).

1. Calculer p(4), p(5) et p(6).
2. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins 4 ?

Exercice 7 :

Tous les élèves d'une classe de Seconde peuvent choisir aucune, une ou deux options parmi :

- l'option Théâtre (T)
- l'option Cinéma (C)

Les élèves qui suivent l'option Théâtre ou l'option Cinéma participeront à un festival.
Cette classe de seconde compte 27 élèves : 7 suivent l'option théâtre, 16 suivent l'option cinéma, et 4 suivent les deux options.

1.
   a. Manon suit les deux options ; fera-t-elle partie du voyage ?
   b. Donner le nombre d'élèves qui font uniquement du théâtre, ceux qui font uniquement du cinéma et enfin ceux qui font du théâtre ou du cinéma.
2. On désigne au hasard un élève de cette classe.
   a. Donner les probabilités P(T) et P(C) des événements T et C puis celles des événements $T \cap C$ et $T \cup C$.
   b. Conjecturer une formule liant P(T),P(C), $P(T \cap C)$ et $P(T \cup C)$.

Résultat

- **$0 \leq P(A) \leq 1$.**
- $P(\emptyset) = 0$ (la probabilité de l'événement impossible est nulle).
- $P(\Omega) = 1$ (la probabilité de l'événement certain est égale à 1).
- **$p(\overline{A}) = 1 - p(A)$,**
- **$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$** donc si A et B sont incompatibles, $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$.

Exercice 8 :

On lance un dé non pipé. Donc $p(1) = p(2) = p(3) = p(4) = p(5) = p(6) = \frac{1}{6}$.

- Soit A l'événement « obtenir un nombre impair ».
- Soit B l'événement « obtenir un nombre inférieur ou égal à 2 ».
- Soit C l'événement « obtenir un nombre multiple de trois ».

Calculer P(A), P(B), P(C), $P(A \cap B)$, $P(\overline{B})$ (de 2 façons) et $P(B \cup C)$ (de 2 façons).

Equiprobabilité

Définition

Quand toutes les issues ont la même probabilité, on dit qu'il y a **équiprobabilité**.

Exemple :

- On tire au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes.
- On lance une pièce parfaitement équilibrée.
- On jette un dé non pipé.
- Les jetons ou les boules sont indiscernables au toucher.

Résultat

Dans ce cas, s'il y a n issues en tout, la probabilité :

- de chacune des issues est $\frac{1}{n}$;
- d'un événement E, composé de k issues, est : $P(E) = \frac{k}{n} = \frac{\text{nombre de cas favorables à l'événement}}{\text{nombre de cas possibles à l'expérience}}$.

Preuve :

- Soit n le nombre d'issues possibles à l'expérience ; On a : $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$ avec $p_1 = p_2 = \ldots = p_n$ donc $p_i = \frac{1}{n}$;
- Soit k le nombre d'issues favorables à E ; Alors $P(E) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n} = k \times \frac{1}{n} = \frac{k}{n}$.

Remarque : Pour dénombrer les cas possibles et les cas favorables, on peut les énumérer, utiliser des **diagrammes**, des **arbres** ou des **tableaux**, …

Exemple : On tire au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes. Chaque tirage est équiprobable, de probabilité $\frac{1}{32}$.

- A : la carte est le roi de cœur $\rightarrow p(A) = \frac{1}{32}$
- C : la carte est un roi $\rightarrow p(C) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$

- B : la carte est un cœur $\rightarrow$ p(B) = $\frac{8}{32} = \frac{1}{4}$
- D : la carte n'est pas un 10 $\rightarrow$ p(D) = $\frac{32-4}{32} = \frac{28}{32} = \frac{7}{8}$.

Exercice 9 :

Dans une fête foraine, un jeu consiste à faire tourner une roue autour d'un axe, roue sur laquelle on a marqué huit secteurs identiques comportant les nombres suivants : 10 ; 20 ; 60 ; 10 ; 50 ; 30 ; 60 ; 40.

On gagne si le secteur face à la flèche, une fois la roue arrêtée, est marquée d'un nombre supérieur ou égal à 50.

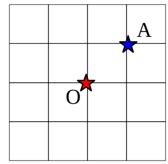
Quelle est la probabilité de gagner ?

Exercice 10 :

Une puce se déplace sur un quadrillage en partant du point O.

Elle fait un saut en choisissant au hasard l'une des directions Sud, Ouest, Nord ou Est puis un deuxième saut.

On note sur le quadrillage sa position finale.



1. Quel est le nombre de positions finales possibles ?
2. Quel est le nombre de chemins possibles ?
3. Quelle est la probabilité qu'elle se trouve en A après les deux sauts ?

Exercice 11 :

Une boîte contient 200 objets : 140 objets sont rouges ($\rightarrow$ R).

75 objets sont sphériques ($\rightarrow$ S) et parmi ceux-ci, 40 sont rouges.

Couleur / Forme	R	$\overline{R}$	Total
S			
$\overline{S}$			
Total			

1. Compléter ce tableau pour schématiser cet exemple.
2. On prend un objet au hasard dans cette boîte.
   Traduire en pourcentage, le nombre de chances pour que :
   a. L'objet ne soit ni rouge, ni sphérique.
   b. L'objet soit rouge ou sphérique.
3. On prend un objet rouge au hasard dans cette boîte.
   Traduire en pourcentage, le nombre de chances pour que l'objet soit sphérique.

Exercice 12 :

On a réalisé une enquête. Parmi les personnes interrogées,

$\rightarrow$ 40% sont fumeurs,
$\rightarrow$ 4 % souffrent de bronchite,
$\rightarrow$ 75 % des personnes atteintes de bronchite sont des fumeurs.

1. Faire un tableau à double entrée.
2. On choisit au hasard une de ces personnes; on a donc une situation d'équiprobabilité. Déterminer la probabilité des événements :
   - A : « la personne choisie est un fumeur »,
   - B : « la personne choisie est atteinte de bronchite »,
   - C : « la personne choisie est un fumeur non atteint de bronchite »,
   - $A \cap B$,
   - $\overline{B}$.
3. On choisit au hasard un fumeur. Donner la probabilité pour que ce soit une personne atteinte de bronchite.

Exercice 13 :

Dans une classe de 30 élèves, 14 sont des filles. Par ailleurs, 8 filles et 4 garçons sont internes. Les autres sont externes.

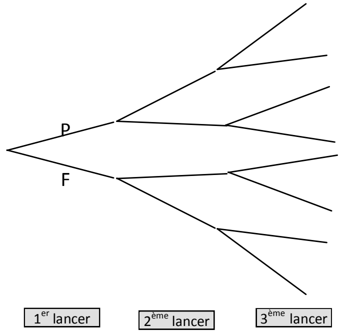
On choisit un élève au hasard dans cette classe. On considère les événements suivants :

$\rightarrow$ A : « l'élève choisi est interne »

$\rightarrow$ B : « l'élève choisi est un garçon »

1. Calculer P(A) puis P(B).
2. Déterminer P($A \cap B$).
3. Calculer P($A \cup B$).

Exercice 14 :



On lance une pièce de monnaie trois fois de suite.

Après chaque lancer on note la face visible : soit pile (P) soit face (F).

1. Compléter cet arbre mettant en évidence les différents résultats possibles.
2. Calculer les probabilités des événements suivants :

- A : "obtenir trois fois la même lettre" ;
- B : "obtenir deux fois la lettre P" ;
- C : "obtenir au moins une fois la lettre F" ;
- D : "obtenir la lettre P suivie de la lettre F".

Exercice 15 :

Dans un restaurant, on propose une carte avec trois entrées, deux plats et desserts :

- entrées : crudités (C), terrine (T), quiche (Q);
- plats : escalope de veau (V), filet de bœuf (B);
- desserts : fruits (F), glace (G), pâtisserie (P).

1. Refaire un arbre comme celui ci-contre pour déterminer tous les menus possibles.
2. On choisit un menu au hasard.

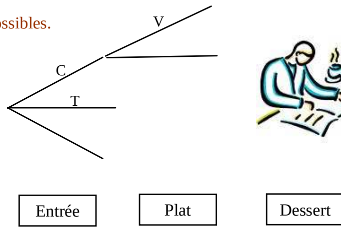
   Déterminer les probabilités des événements suivants :

   → E_1 = "le menu comporte un fruit";

   → E_2 = "le menu comporte une escalope de veau";

   → E_3 = "le menu comporte un filet de bœuf et une glace";

   → E_4 = "le menu ne comporte ni terrine, ni pâtisserie".



Exercice 16 :

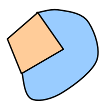
On lance successivement 3 dés non pipés. Quelle est la probabilité de chacun des événements suivants :

1. « La somme des 3 chiffres obtenus est égale à 3 » ?
2. « La somme des 3 chiffres obtenus est égale à 18 » ?
3. « La somme des 3 chiffres obtenus est égale à 4 » ?

Exercice 17:

Un enfant a 3 crayons de couleurs différentes dont un rouge. Il veut colorier ce dessin formé de 2 zones.

1. Quel est le nombre de dessins coloriés possibles (il peut utiliser 2 fois le même crayon ...) ?
2. Quelle est la probabilité pour qu'il y ait au moins 1 zone en rouge ?
3. Quelle est la probabilité pour que les 2 zones soient de couleurs différentes ?



Exercice 18 :

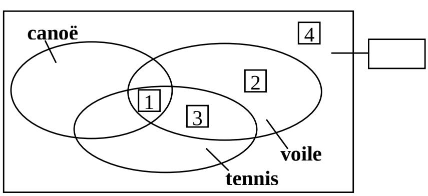
Trois personnes A , B et C se donnent rendez vous au café du village mais il y a 3 cafés X , Y et Z dans ce village .

Quelle est la probabilité pour qu'aucune d'elles n'en rencontre aucune autre ?

Exercice 19 :

Un camp de vacances hébergeant 100 personnes, 45 pratiquent le canoë, 60 le tennis et 50 la voile.

Parmi ces personnes, 20 pratiquent le tennis et la voile seulement, 10 pratiquent le tennis et le canoë seulement, et 15 pratiquent le canoë et la voile seulement. Enfin, 5 pratiquent ces trois sports.



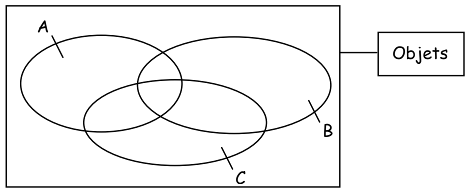
1. Décrire par une phrase chacune des régions 1, 2, 3 et 4 du diagramme ci-dessus puis associer à chaque région définie par ce diagramme le pourcentage qui lui correspond.
2. On choisit une personne au hasard dans ce camp. Déterminer la probabilité :
   a. qu'elle ne pratique qu'un seul sport;
   b. qu'elle ne pratique que la voile;
   c. qu'elle pratique le tennis ou la voile.

Exercice 20 :

Dans une usine, on fabrique des objets qui peuvent présenter trois défauts (désignés par les lettres A, B et C).

Sur mille objets fabriqués, on constate que :

- 12 ont les trois défauts ;
- 60 ont au moins le défaut A ;
- 52 ont au moins le défaut B ;
- 60 ont au moins le défaut C ;
- 20 ont au moins les défauts A et B ;
- 26 ont au moins les défauts A et C ;
- 25 ont au moins les défauts B et C.



1.
   a. Compléter le diagramme des effectifs ci-contre ;
   b. Calculer le nombre d'objets n'ayant pas de défaut.
2. On prend un objet au hasard. Traduire en pourcentage, le nombre de chances qu'il ait :
   a. le défaut A ;
   b. les défauts A et B ;
   c. les défauts A ou B ;
   d. exactement deux défauts ;
   e. au plus deux défauts ;
   f. au plus trois défauts.
3. On prend, au hasard, un objet ayant le défaut A. Traduire en pourcentage, le nombre de chances qu'il ait :
   a. le défaut B ;
   b. le défaut B, mais pas le C.

☆☆☆☆☆☆☆